Ecuaciones diferenciales

Profesores:

Eusebio Valero

(grupos A y B)

Encargado de responder a todas las preguntas de la asignatura y de todas las tutorías.

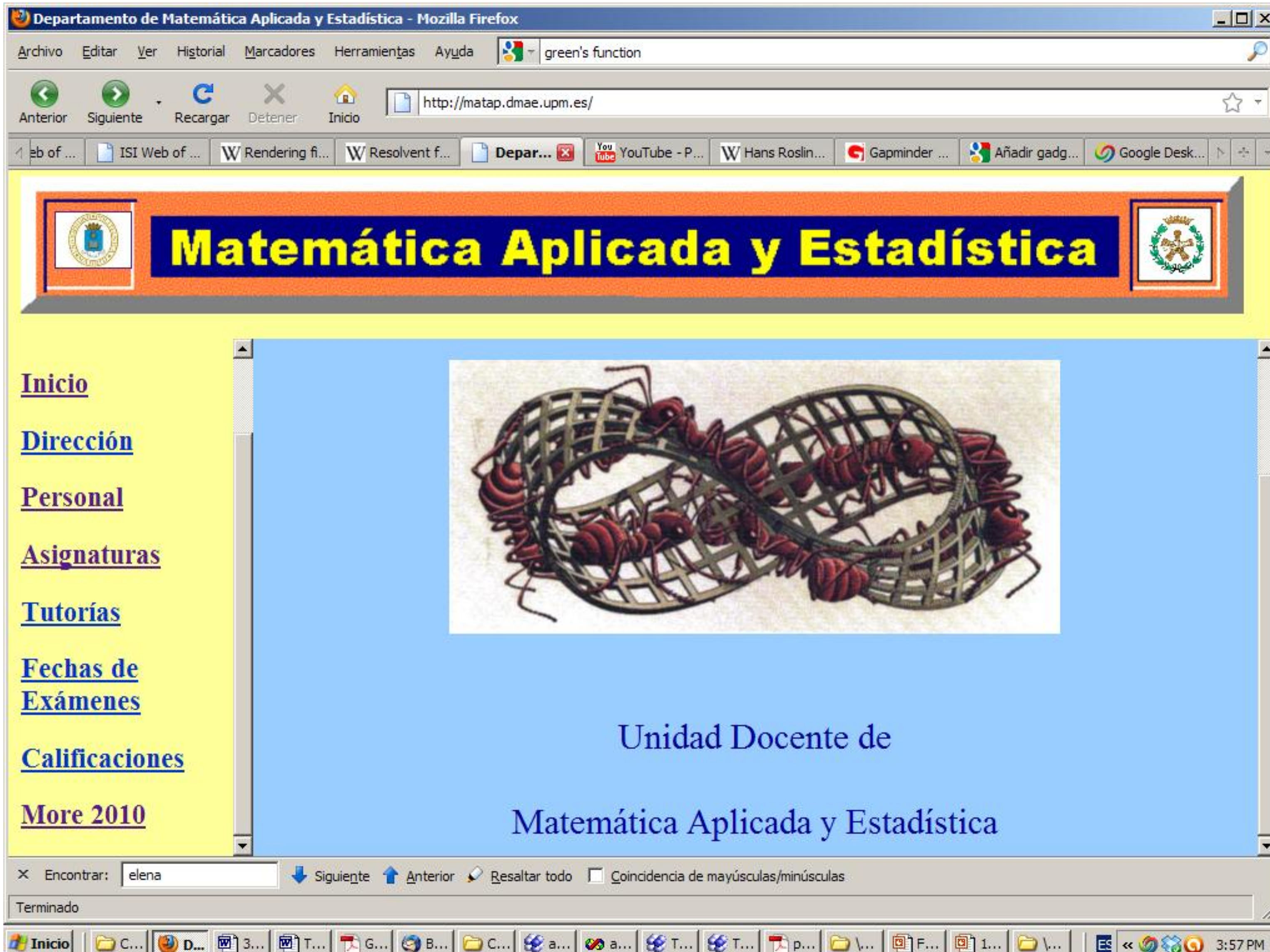
Bartolo Luque

(grupos C y D)

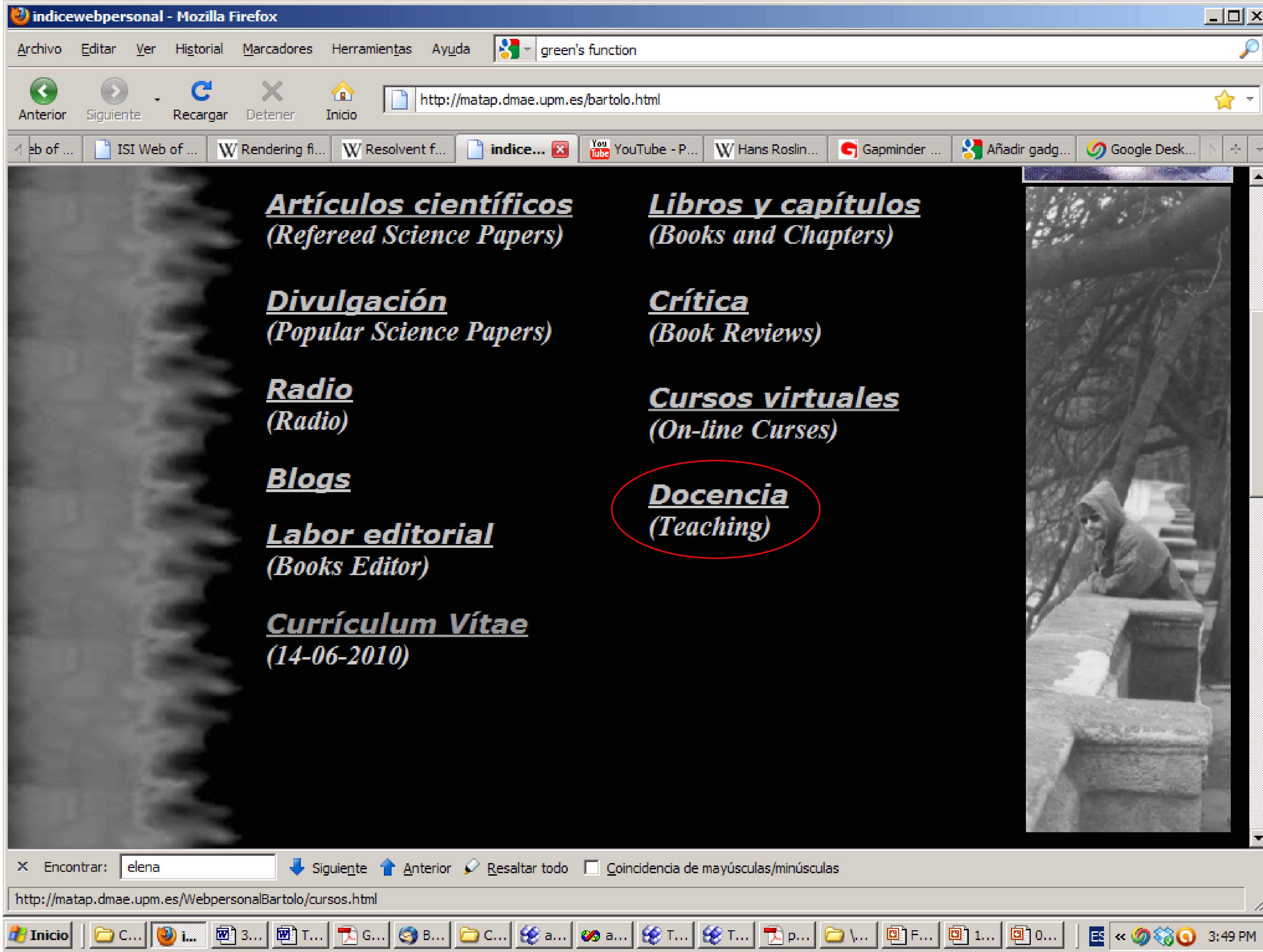
Este no tiene ni idea. No lo molestéis.

Página del departamento de Matemática Aplicada y Estadística (Mejor no subáis, está en la última planta y sin ascensor):

http://matap.dmae.upm.es



Página personal para apuntes: http://matap.dmae.upm.es/bartolo.html



ivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda green's function

erior Siguiente Recargar Detener Inicio http://matap.dmae.upm.es/WebpersonalBartolo/docencia.html

of ... ISI Web of ... Rendering fi... Resolvent f... Docen... YouTube - P... Hans Roslin... Gapminder ... Añadir gadg... Google Desk...

Docencia

Ecuaciones diferenciales

Métodos Matemáticos I

Estadística Aplicada

Teoría de números y sistemas complejos

Encontrar: elena Siguiente Anterior Resaltar todo Coincidencia de mayúsculas/minúsculas

inado

MÉTODOS MATEMÁTICOS - Mozilla Firefox

Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda green's function

Anterior Siguiente Recargar Detener Inicio file://///Matap/web/WebpersonalBartolo/EDOoficial.html

eb of ... | Rendering fi... | Resolvent f... | MÉTODOS ... | YouTube - P... | Hans Roslin... | Gapminder ... | Añadir gadg... | Google Desk... | MÉTO...

APUNTES DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Nota: Los archivos son pdf o PowerPoint (*.ppt).
En este último caso te recomendamos que los imprimas seleccionando:
"Imprimir" - "Imprimir: Documentos"- "Diapositivas por página: 2
se ven muy bien, 6 ocupan menos... vosotr@s mism@s"
y a doble cara en las opciones de tu impresora.

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales.ppt
Introducción a las ecuaciones diferenciales.pdf
Ejercicios tema 1.pdf

2. Métodos de resolución.ppt
Métodos de resolución.pdf
Ejercicios tema 2.pdf

3. Ecuaciones diferenciales de orden superior.ppt
Ecuaciones diferenciales de orden superior.pdf
Apuntes de José Olarrea: Método Anulador

4. Soluciones de ecuaciones lineales en series de potencias.ppt
Soluciones de ecuaciones lineales en series de potencias.pdf
Apuntes de José Olarrea: Soluciones en Serie

5. Repaso de matrices.ppt
Repaso de matrices.pdf

Encontrar: elena Siguiente Anterior Resaltar todo Coincidencia de mayúsculas/minúsculas

Terminado

Bibliografía principal:

Dennis G. Zill y Michael R. Cullen
Ecuaciones diferenciales
Matemáticas avanzadas para ingeniería, vol. 1
Ed. Thomson Paraninfo, 2006
Tercera edición

M. Cordero y M. Gómez
Ecuaciones Diferenciales
García-Maroto Editores, 2008

George F. Simmons y Steven G. Krantz
Ecuaciones Diferenciales
García-Maroto Editores, 2008

1. Introducción a las ecuaciones diferenciales

(© Chema Madoz, VEGAP, Madrid 2009)

¿Qué es una ecuación diferencial?

$$y(x) = e^{0.1\cdot x^2} \longrightarrow \frac{dy}{dx} = 0.2 \cdot x \cdot e^{0.1\cdot x^2}$$

Función diferenciable en (-∞, ∞). Su derivada es:

Ejemplo de ecuación diferencial

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = 0.2 \cdot x \cdot y}$$

Imaginemos que nos dan directamente esta ecuación. Intentaremos contestar preguntas del tipo: ¿Qué función representa *y(x)*? ¿Cómo se resuelve semejante ecuación?

¿Qué es una ecuación diferencial (ED)?

Es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables **dependientes**, con respecto a una o más variables **independientes**.

variable dependiente

$$\frac{dy}{dx} = 0.2 \cdot x \cdot y$$

variable independiente

Las EDs se clasifican por **tipo**, **orden** y **linealidad**.

Clasificación por tipo:

Ecuación diferencial ordinaria (EDO):
Una ecuación que contiene sólo **derivadas ordinarias** de una o más variables dependientes de **una sola variable independiente**.

Ejemplo de EDO:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Una EDO puede contener más de una variable dependiente:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 2x + y$$

Ecuación diferencial parcial (EDP):

Una ecuación que contiene **derivadas parciales** de una o más variables dependientes de **dos o más variables independientes**.

Ejemplos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$

Notaciones

Notación de Leibniz: dy/dx, d^2y/dx^2,...

Notación con primas: y', y'', y'''... $y^{(n)}$,...

Notación de Newton: $\dot{x}, \ddot{x}, \dddot{x}, \ldots$

Notación de subíndice: u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, ...

En la notación de Leibniz localizamos rápidamente cuál es la variable dependiente y la independiente:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

Clasificación según el orden:

El orden de una ecuación diferencial (ya sea EDO o EDP) es **el orden mayor de la derivadas** involucradas en la ecuación.

Ejemplo:

$$\overset{\substack{\text{Segundo orden}\\ \downarrow}}{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5\Big(\overset{\substack{\text{Primer orden}\\ \downarrow}}{\frac{dy}{dx}}\Big)^3 - 4y = e^x$$

Luego, es una EDO de segundo orden.

Nota: A veces escribiremos las EDOs en **forma diferencial**

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

Por ejemplo, supongamos que *y* es la variable dependiente y *x* la independiente en la EDO en forma diferencial:

$$(y-x)dx + 4xdy = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

$$y - x + 4xy' = 0$$

Forma general de orden *n* de una EDO:

$$F(\underbrace{x, y, y', \ldots, y^{(n)}}_{n+2 \text{ variables}}) = 0$$

Forma normal de orden *n* de una EDO:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(\underbrace{x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}}_{n+1 \text{ variables}})$$

Por ejemplo, las formas general y normal de la EDO
$4xy' + y = x$, son respectivamente:

$$F(x, y, y') = y' - (x - y)/4x = 0$$

$$y' = (x - y)/4x = f(x, y)$$

Grado

El grado de una ecuación diferencial es **el grado algebraico de su derivada de mayor orden**. Es decir, el grado de una ecuación diferencial es la potencia a la que esta elevada la derivada que nos da el orden de la ecuación diferencial.

Ejemplo:
La siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4y = e^x$$

es de primer grado, dado que la segunda derivada, que nos da el orden de la EDO, está elevada a uno.

Ejercicios

Determinar el grado de las siguientes ecuaciones:

a) $$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2 - 5\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x^2 + 7$$

b) $$\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\left(\frac{dy}{dx}\right)^6 = x^2 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

NOTA: *cuando alguna derivada esté dentro de un radical o en polinomio, que a su vez esté elevado a una potencia fraccionaria, tendremos que eliminar dicho radical para determinar el grado de la ecuación diferencial.*

$$\sqrt{\frac{dy}{dx}} = 7x^2 + 1 \qquad \sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + x} = \sqrt[3]{\frac{dy}{dx}}$$

Ejercicios

Determinar el orden y grado de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $$\frac{d^3y}{dx^3} = 3x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 5y$$

b) $$\sqrt{\frac{d^3y}{dx^3}} - 5x = 8\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

c) $$\frac{dy}{dx} + 18\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^3 = 8x + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^5$$

d) $$\sqrt{\frac{d^2y}{dx^2} + 3x} = \sqrt[5]{\frac{d^3y}{dx^3}}$$

Clasificación según la linealidad:

Se dice que una EDO de orden *n* es lineal si *F* (en la forma general) es lineal en *y, y', y'', …, y^(n)*.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y-g(x)=0$$

O bien:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Dos casos importantes para nosotros serán las **EDOs lineales de primer** y **segundo orden**.

$$a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Lineal homogénea:

El término independiente *g(x)* es nulo.

Lineal con coeficientes constantes:

Los coeficientes $a_0(x),...,a_n(x)$ son constantes.

Lineal con coeficientes variables:

Enfatiza el hecho de que al menos uno de los coeficientes $a_0(x),...,a_n(x)$ NO es constante.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

En una **EDO lineal de orden *n***:

1) y, y', y'', …, $y^{(n)}$ son de **primer grado**.

2) Coeficientes a_0, a_1, …, **dependen solo de la variable independiente *x***.

Si no es lineal, es **no lineal** :-)

Ejemplos de EDOs no lineales:

El coeficiente depende de *y*.

$$(1-y)y'+2y=e^x$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2}+\sin y=0$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4}+y^2=0$$

Función no lineal de *y*.

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x)$$

Ejemplos: ¿Lineales o no lineales?

1) $\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{RC}v(t)=\frac{1}{RC}V_s(t)$

2) $\frac{dT}{dt}=K(T_a-T)$

3) $ml\ddot{\theta}+kl\dot{\theta}+mgsen\theta=0$

4) $\frac{dy}{dx}=\frac{-x\pm\sqrt{x^2+y^2}}{y}$

5) $y'+x^3y+\sin(x)y^2=x^2-1$

6) $y''-\mu(1-y^2)y'+y=0$

Ejemplo: comprobación de una solución.

Comprobar que la función indicada es la solución de la EDO dada en el intervalo $(-\infty, \infty)$:

(a) $dy/dx = xy^{1/2}$. Solución: $y = x^4/16$.

Solución: Existe la derivada $dy/dx = x^3/4$ *para todo x de* $(-\infty, \infty)$.

(a) Lado izquierdo :
$$\frac{dy}{dx} = 4 \cdot \frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4}$$

Lado derecho:
$$xy^{1/2} = x \cdot \left(\frac{x^4}{16} \right)^{1/2} = x \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4}$$

Y la igualdad se cumple para todo x de $(-\infty, \infty)$.

Ídem, para (b) $y'' - 2y' + y = 0;$ $y = xe^{x}$

<u>**Solución**</u>:

(b) Derivando la solución dos veces:

$$y' = xe^{x} + e^{x}$$

$$y'' = xe^{x} + 2e^{x} :$$

$$y'' - 2y' + y = (xe^{x} + 2e^{x}) - 2(xe^{x} + e^{x}) + xe^{x} = 0$$

Nótese que *y(x) = 0* también es solución tanto de este ejemplo como del anterior en el intervalo (-∞, ∞).

Se conoce como **solución trivial**.

Solución de una EDO

Cualquier función ϕ, definida en un intervalo *I* y con al menos *n* derivadas continuas en *I*, que al sustituirse en una ecuación diferencial ordinaria de *n*-ésimo orden reduce la ecuación a una identidad, se considera solución de la ecuación en el intervalo.

En otras palabras, ϕ posee al menos *n* derivadas y cumple:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in I$$

Siempre hemos de considerar una solución junto a su **intervalo *I* de definición**, también llamado intervalo de existencia, de validez o dominio de definición.

Al proceso de obtención de las soluciones de una EDO se le denomina **integración de la ecuación**.

Una EDO puede tener:

Infinitas soluciones: $y' = y\cos x; \qquad y(x) = Ce^{\sin t}$

Una única solución: $(y')^2 + y^2 = 0; \qquad y(x) = 0$

Ninguna solución: $(y')^2 + x^2 = 0$

Ejemplo

Comprobar que la $y = x^2 + C$ no es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Solución

Derivando $y = x^2 + C$ tenemos

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Sustituyendo el valor de la derivada encontrada en la ecuación diferencial tenemos:

$$2x = x$$

$$2 \neq 1$$

Por lo tanto $y = x^2 + C$ no es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Ejercicios Determine si cada ecuación es solución o no de la ecuación diferencial dada:

$$y = x^2 + Cx; \qquad x\left(\frac{dy}{dx}\right) = x^2 + y$$

$$y = Asen(5x) + B\cos(5x); \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + 25y = 0$$

$$y = C(x - C)^2; \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) + 8y^2 = 0$$

$$y = C^2 + Cx^{-1}; \qquad y + xy' = x^4(y')^2$$

$$e^{\cos x}(1 - \cos y) = C; \qquad seny\left(\frac{dy}{dx}\right) + senx\cos y = senx$$

$$y = 8x^5 + 3x^2 + C; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - 6 = 160x^3$$

Ejemplo: Hagámoslo a la inversa.

Encuentre la ED cuya solución general es $y = x^2 + C$.

Solución

Observemos que sólo aparece una constante de integración, de manera que derivamos una sola vez la solución general $y = x^2 + C$. Así

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Como en esta derivada no aparecen constantes de integración, quiere decir que esta es la ED de la solución general propuesta.

Ejemplo

Encuentre la ED cuya solución general es $y = C\,x^2$.

Solución

Observemos que sólo aparece una constante de integración, de manera que derivamos una sola vez la solución general $y = C\,x^2$. Así

$$\frac{dy}{dx} = 2Cx$$

Despejamos C de la solución general y se sustituye el valor encontrado en la ED.

$$C = \frac{y}{x^2} \qquad \frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{y}{x^2}\right)x$$

Por lo tanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

es la ED de la solución general, puesto que ya no aparecen constantes de integración.

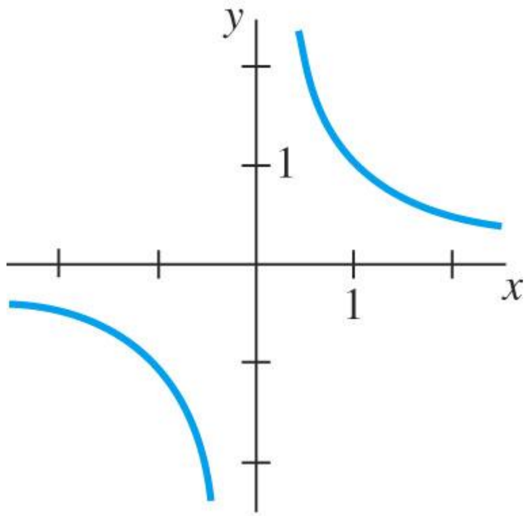
Ejercicios Encuentra la ED de cada una de las siguientes soluciones generales:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}$$

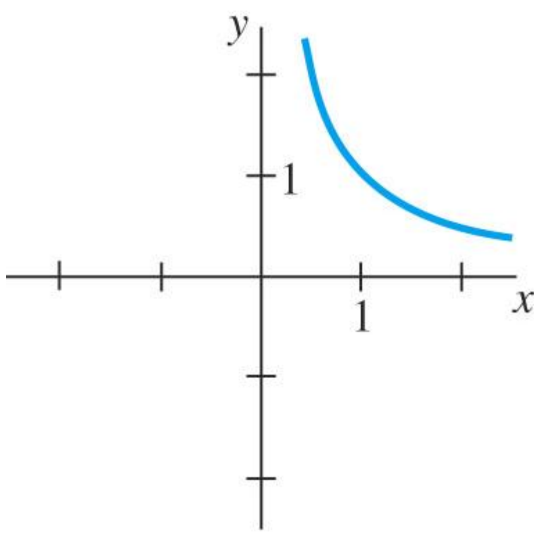
$$y = \tan(3x + C)$$

$$\left(x - C_1\right)^2 + y^2 = C_2^2$$

Función *vs* solución



(a) Function $y = 1/x$, $x \neq 0$



(b) Solution $y = 1/x$, $(0, \infty)$

La gráfica de una solución ϕ de una EDO se llama **curva solución**. Como ϕ es una función diferenciable, es continua en su intervalo de definición *I*. Puede, entonces, haber diferencias entre la gráfica de la función y la solución. Veamos un ejemplo:

(a) $y = 1/x$ considerada como una función, tiene dominio de definición $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

Es discontinua y no diferenciable en $x = 0$.

(b) $y = 1/x$ es también solución de $xy' + y = 0$. Se entiende que es solución en algún intervalo *I* en el que es diferenciable y cumple la EDO. Por ejemplo, en $(0, \infty)$.

Solución explícita de una EDO:

La variable dependiente está expresada solamente en términos de variables independientes y constantes.

Por ejemplo, la solución de $xy' + y = 0$ en $(0, \infty)$ es

$y = \phi(x) = 1/x$.

Solución implícita de una EDO

Una relación $G(x,y) = 0$ es una solución implícita de una EDO en un intervalo I, siempre que exista al menos una función $y = \phi(x)$ que satisface tanto la relación como la ED en I.

Veamos un ejemplo →

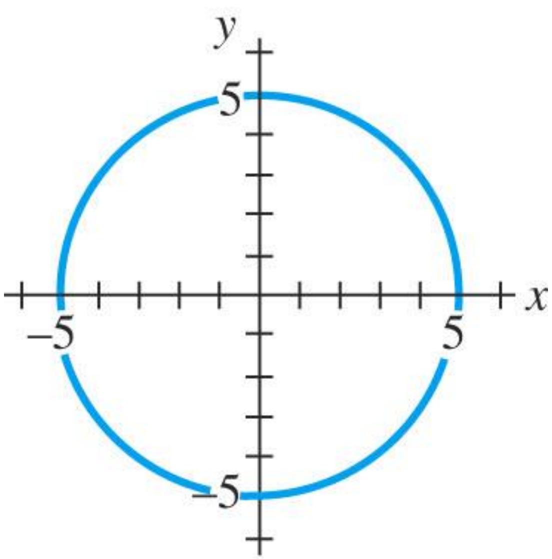
Ejemplo: Comprobación de una solución implícita.

$x^2 + y^2 = 25$ es una solución implícita de $dy/dx = -x/y$ en el intervalo $-5 < x < 5$; puesto que al derivar de forma implícita respecto a x:

$dx^2/dx + dy^2/dx = (d/dx)(25)$, $2x + 2y(dy/dx) = 0$;

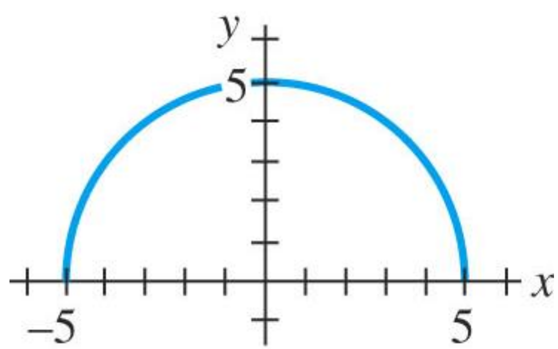
obtenemos la EDO: $dy/dx = -x/y$.

Despejando y de la solución implícita podemos encontrar dos soluciones explícitas:



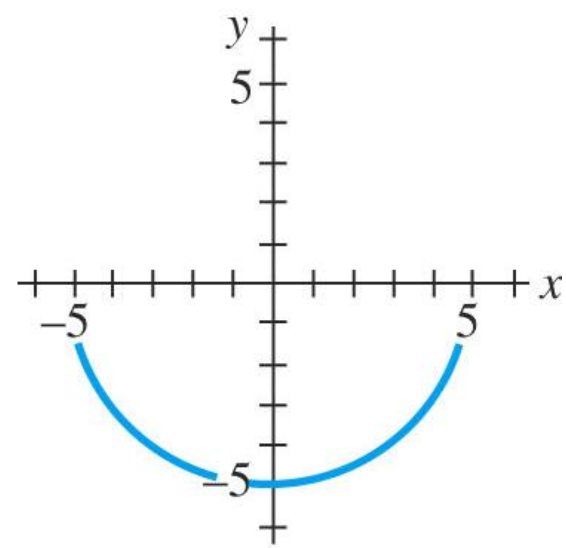
(a) Implicit solution

$x^2 + y^2 = 25$



(b) Explicit solution

$y_1 = \sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$



(c) Explicit solution

$y_2 = -\sqrt{25 - x^2}, -5 < x < 5$

Familia de soluciones o solución general:

Al resolver una EDO de primer orden $F(x, y, y') = 0$, en general, se obtiene una solución que contiene una constante arbitraria o parámetro c. Una solución así, $G(x, y, c) = 0$ representa en realidad a un conjunto de soluciones, llamado **familia uniparamétrica de soluciones**.

Cuando se resuelve una ED de orden n, se busca una **familia n-paramétrica de soluciones**

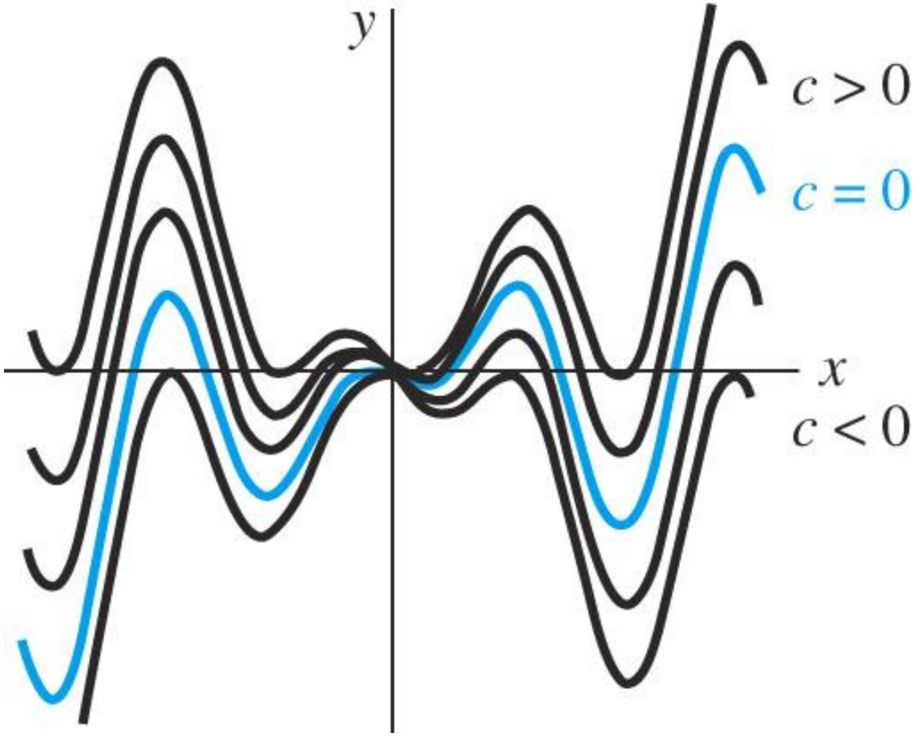
$G(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0$.

Observemos que el número de constantes arbitrarias en la solución general está determinado por el orden de la EDO.

Solución particular: es una solución libre de parámetros arbitrarios.

Por ejemplo : $y = cx - x \cos x$ es la solución general de $xy' - y = x^2 \sin x$ en $(-\infty, \infty)$; una familia uniparamétrica de soluciones.

Tomando $c = 0$, tenemos: $y = x \cos x$, una **solución particular**.



*Ejemplo: Sin explicitarlo, hemos visto que las variables independientes y dependientes pueden usar **símbolos distintos** a x e y. Por ejemplo:*

$x = c_1 \cos(4t)$

$x = c_2 \operatorname{sen}(4t)$

con c_1 y c_2 constantes o parámetros arbitrarios, son ambas soluciones de la EDO:

$$x'' + 16x = 0.$$

Podemos comprobar fácilmente que la suma

$x = c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t$

es también una solución.

Ejemplo: **solución definida por partes**.

Podemos comprobar que la familia uniparamétrica $y = cx^4$

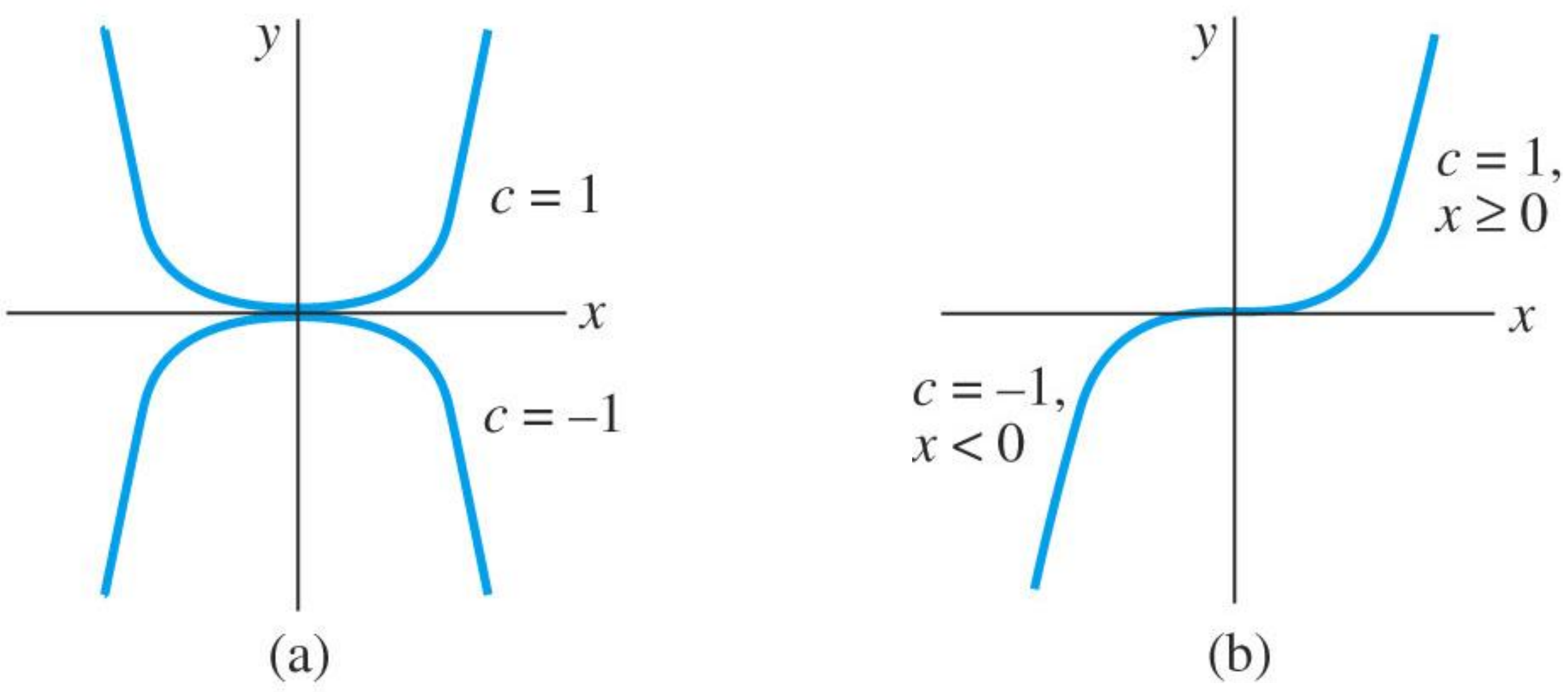
es una solución de $xy' - 4y = 0$ en $(-\infty, \infty)$.

La función definida a trozos:

$$y = \begin{cases} -x^4, & x < 0 \\ x^4, & x \geq 0 \end{cases}$$

es una solución particular donde elegimos $c = -1$ para $x < 0$

y $c = 1$ para $x \geq 0$.



Solución singular: Una solución que no puede obtenerse al especificar los valores de los parámetros de la familia de soluciones.

Por ejemplo: $y = (x^2/4 + c)^2$ es la familia de soluciones de $dy/dx = xy^{1/2}$, sin embargo

$y(x) = 0$ también es una solución de la ED anterior.

No podemos encontrar ningún valor de c en la familia de soluciones $y = (x^2/4 + c)^2$ que nos proporcione la solución $y = 0$, así que llamamos a $y = 0$, **solución singular**.

Sistema de EDOs: dos o más ecuaciones con las derivadas de dos o más funciones desconocidas de una sola variable independiente.

Ejemplo de sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} dx/dt = f(t, x, y) \\ dy/dt = g(t, x, y) \end{cases}$$

Problemas de valores iniciales (PVI)

Encontrar la solución *y(x)* de una ED que además satisfaga condiciones adicionales
en *y(x)* y en sus derivadas.

Ejemplo: en un intervalo *I* que contiene a x_o

Resolver $$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

con condiciones $$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

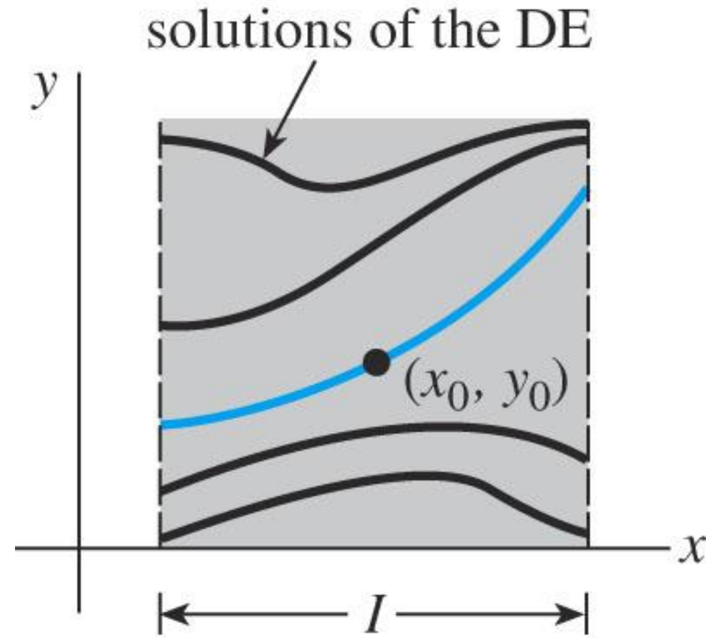
A esto se le llama ***problema de valor inicial***.

Y a las condiciones se las llama: ***condiciones iniciales***.

PVIs de primer y segundo orden:

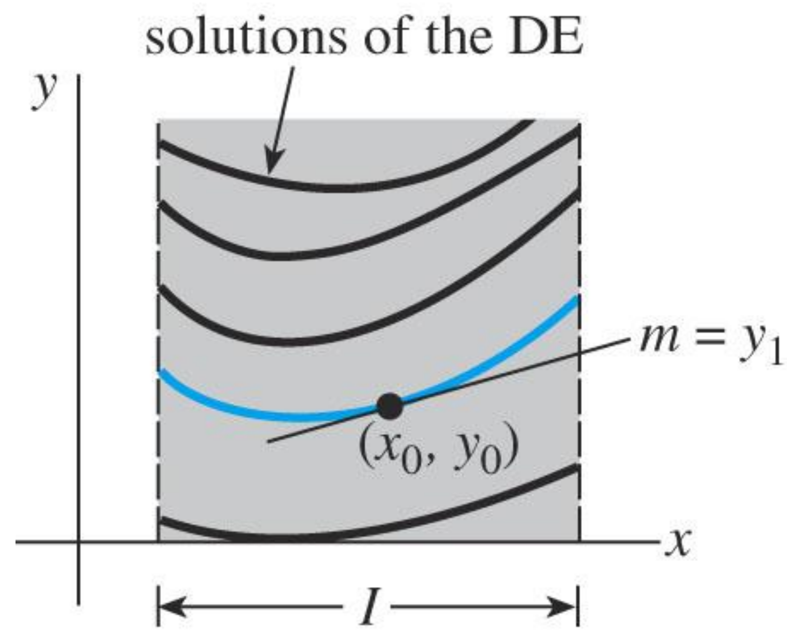
Resolver: $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeta a: $$y(x_0) = y_0$$



Resolver: $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

sujeta a: $$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1$$



son problemas de valor inicial de **primer y segundo orden**, respectivamente. Fácilmente interpretables de manera geométrica, como vemos en las figuras.

Ejemplo:

Sabemos que $y = ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la EDO:

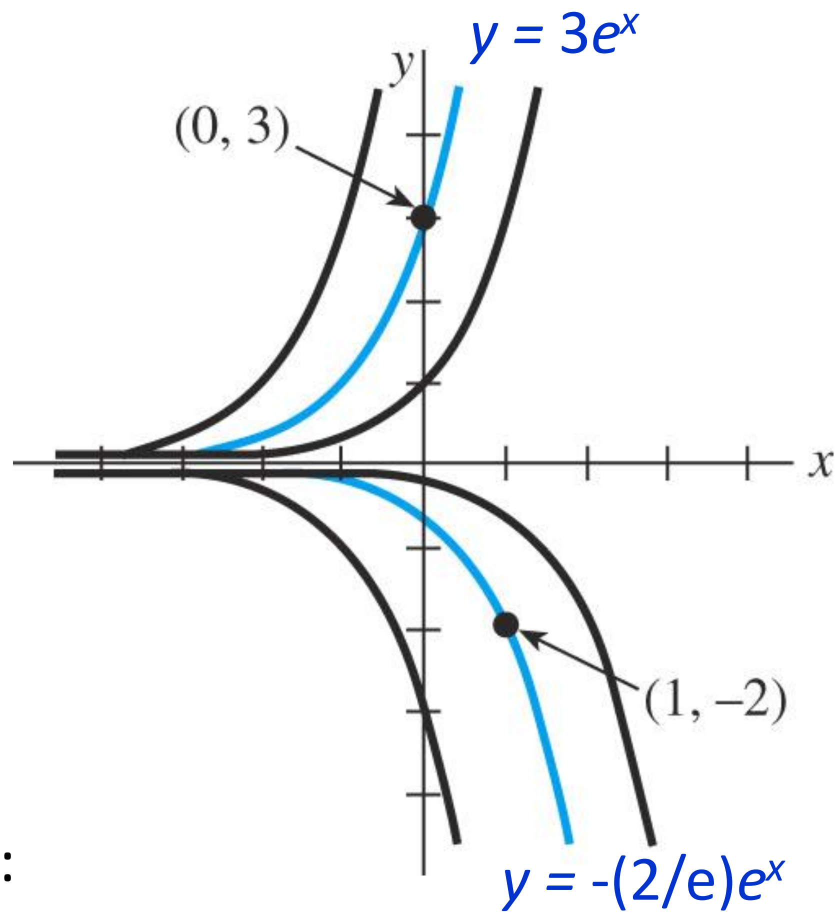
$y' = y$ en $(-\infty, \infty)$.

Si $y(0) = 3$, entonces

$3 = ce^0 = c$. Así $y = 3e^x$ es una solución de este problema de valor inicial.

Si queremos una solución que pase por (1, -2), entonces la condición es: $y(1) = -2$. De modo que $-2 = ce$,

$c = -2e^{-1}$. Y tenemos $y = -(2/e)e^x$.



Ejemplo: vimos que $x = c_1\cos(4t) + c_2\text{sen}(4t)$ era una solución de $x'' + 16x = 0$.

Hallar una solución del siguiente PVI:

$$x'' + 16x = 0, \qquad x(\pi/2) = -2, \quad x'(\pi/2) = 1.$$

Solución:

Sustituimos: $x(\pi/2) = -2$ en

$x = c_1\cos(4t) + c_2\text{sen}(4t)$,

y obtenemos $c_1 = -2$.

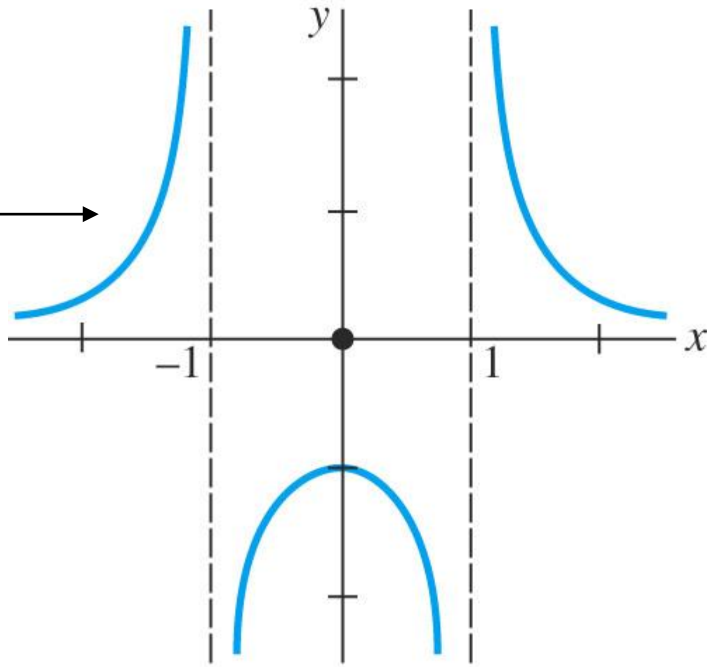
De la misma manera, a partir de $x'(\pi/2) = 1$ obtenemos $c_2 = \frac{1}{4}$. La solución pedida es:

$$x = -2\cos 4t + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}\, 4t$$

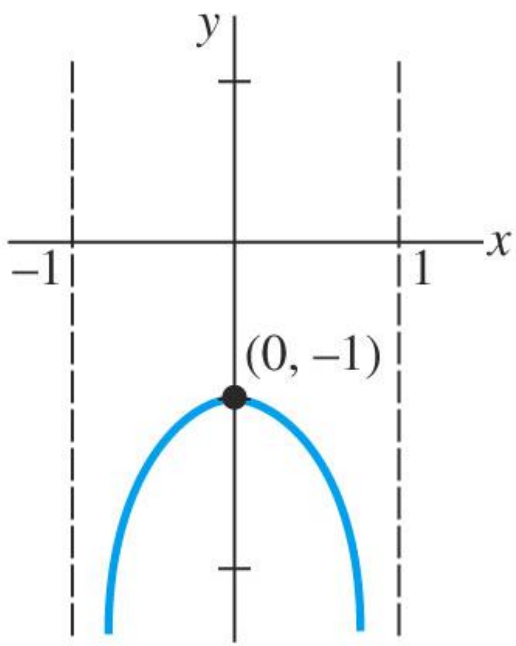
Ejemplo: la solución de $y' + 2xy^2 = 0$ es $y = 1/(x^2 + c)$.
Si imponemos $y(0) = -1$, obtenemos $c = -1$.

Considérense las siguientes distinciones:

1) Como función, el dominio de $y = 1/(x^2 - 1)$ es el conjunto de todos los números reales excepto -1 y 1.



(a) function defined for all x except $x = \pm 1$



(b) solution defined on interval containing $x = 0$

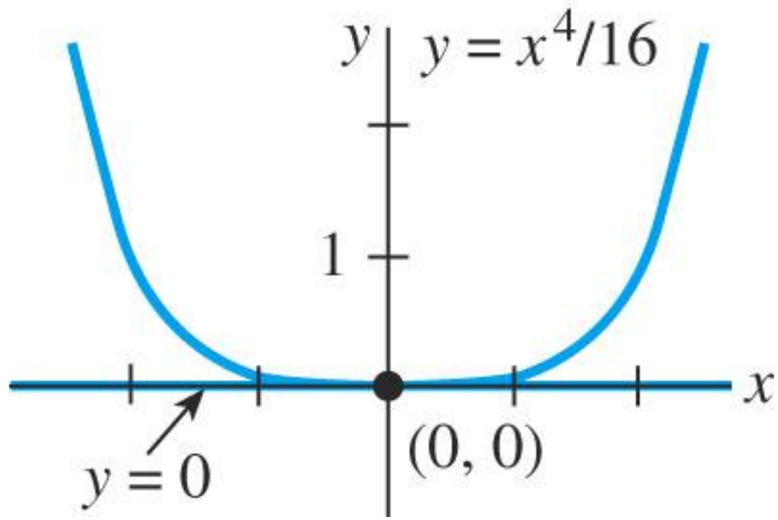
2) Como una solución: los intervalos de definición mayores posibles son $(-\infty, 1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$.

3) Como un problema de valor inicial, con $y(0) = -1$. El intervalo de definición mayor es $(-1, 1)$.

Existencia y unicidad:

¿Existe siempre una solución para un problema de valor inicial (PVI)? Y si existe una solución, ¿es única?

Ejemplo: Ya que $y = x^4/16$ *e* $y = 0$ satisfacen la ED $dy/dx = xy^{1/2}$, y también el valor inicial $y(0) = 0$, esta ED tiene al menos dos soluciones:



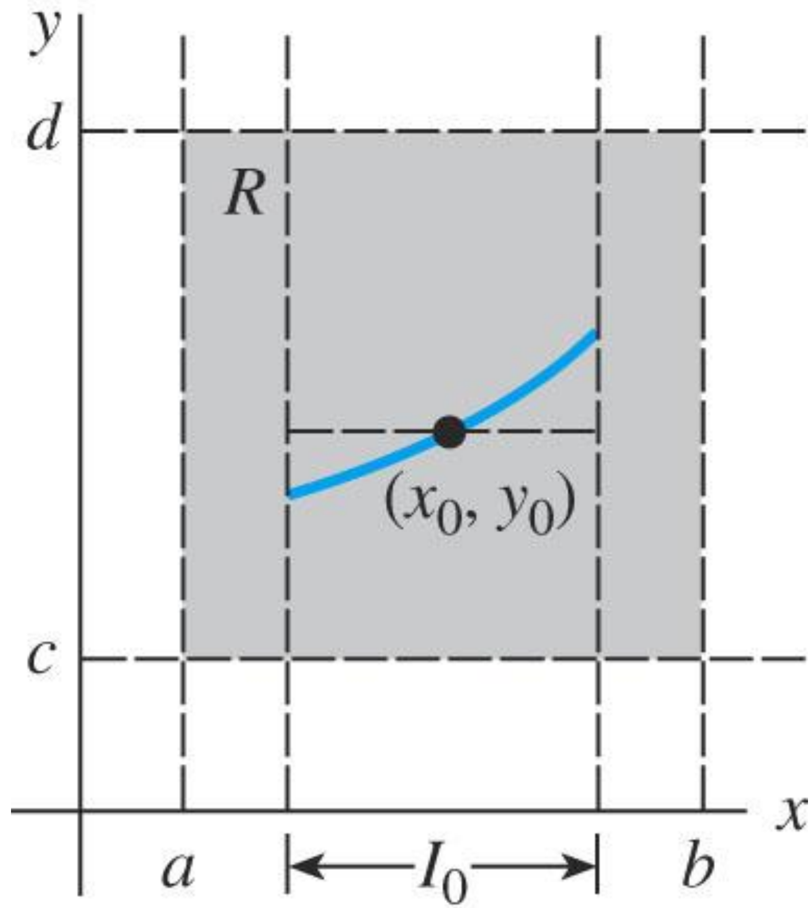
Teorema de existencia de una solución única

$$y' = f(x, y)$$

Sea R la región rectangular en el plano xy definida por

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ que contiene el punto (x_o, y_o) en su interior. Si $f(x, y)$ y $\partial f / \partial y$ son continuas en R, entonces existe algún intervalo I_o:

$x_o - h < x < x_o + h$, $h > 0$, contenido en $a \leq x \leq b$ y una función única $y(x)$ definida en I_o que es una solución del PVI .

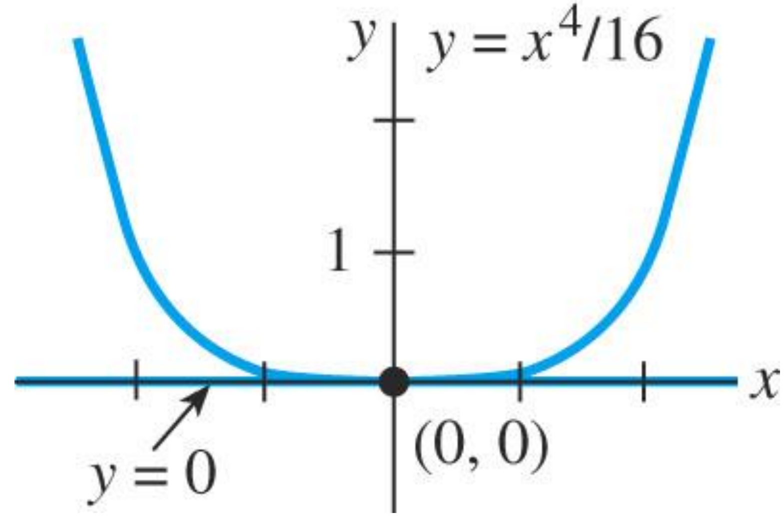


Las condiciones del teorema son suficientes, pero no necesarias...

Vimos que $dy/dx = xy^{1/2}$, tenía como soluciones a $y = x^4/16$ e $y = 0$. La inspección de las funciones:

$$f(x, y) = xy^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

muestra que son continuas en el semiplano superior $y > 0$. Basándonos en el teorema de existencia de una solución única, concluimos que para cada punto (x_o, y_o), con $y_o > 0$, existe un intervalo centrado en x_o en el que esta ED tiene una solución única.



Intervalo de existencia y unicidad

Suponiendo que *y(x)* es una solución de un PVI, los siguientes conjuntos pueden no ser los mismos:

- el dominio de *y(x),*
- el intervalo de definición de *y(x)* como solución,
- el intervalo I_o de existencia y unicidad.